

<到達目標> 自分の習得状況を定期的にチェックせよ。

1 関数の第 n 次導関数を求めることができる

<関数 $y=f(x)$ が、 x で n 回微分可能な関数であるとき、 $y=f(x)$ を順に n 回 x で微分した導関数を「第 n 次導関数」と呼びます。このとき、 n 次導関数は

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

といった感じで表します。だけど3回微分までは今まで通り、ダッシュ（'）を使って、

「 y' 、 y'' 、 y''' 」や、「 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 、 $f'''(x)$ 」と表すことが多いですよ。>

1 次の関数に対して、第1次から第4次までの導関数 y' 、 y'' 、 y''' 、 $y^{(4)}$ を求めよ。

(1) $y=x^3$

(2) $y=e^x$

(3) $y=e^{-x}$

(4) $y=\sin x$

(5) $y=\cos x$

(6) $y=\log x$

(7) $y=-\frac{1}{x+1}$

2 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=(x+a)e^{bx}$ が、 $f'(0)=3$ 、 $f''(0)=-2$ を満たすとき、定数 a 、 b の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=x(\sin ax + \sin bx)$ において、

① $f'(0)$ の値を求めよ。

② $f''(0)=4$ となるような定数 a 、 b の関係式を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=\log(x^2+1)$ について、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x}$ について、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 、 $f'''(x)$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x)=-xe^{-x}$ について、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 、 $f'''(x)$ を求めよ。

(4) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ について、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) $y = e^{-x} \cos x$ のとき、 $y'' + 2y' + 2y = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ について、 $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) 関数 $y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ は、等式 $4y'' - 12y' + 25y = 0$ を満たすことを示せ。

解答

- 1 (1) $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = 0$
 (2) $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y''' = e^x$, $y^{(4)} = e^x$
 (3) $y' = -e^{-x}$, $y'' = e^{-x}$, $y''' = -e^{-x}$, $y^{(4)} = e^{-x}$
 (4) $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$
 (5) $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$, $y^{(4)} = \cos x$
 (6) $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$
 (7) $y' = (x+1)^{-2}$, $y'' = -2(x+1)^{-3}$, $y''' = 6(x+1)^{-4}$, $y^{(4)} = -24(x+1)^{-5}$
- 2 (1) $a = -4$, $b = -\frac{1}{2}$ (2) ① $f'(0) = 0$ ② $a + b = 2$
- 3 (1) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $f''(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$
 (2) $f'(x) = -(x-1)e^{-x}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$, $f'''(x) = -(x-3)e^{-x}$
 (3) $f'(x) = (x-1)e^{-x}$, $f''(x) = -(x-2)e^{-x}$, $f'''(x) = (x-3)e^{-x}$
 (4) $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$, $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$
- 4 (1) 略 (2) 略 (3) 略